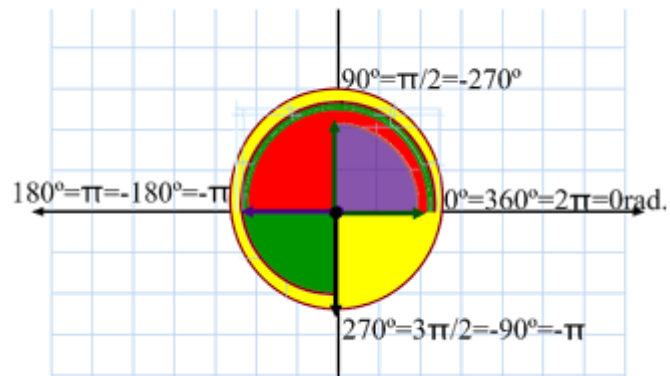


## CONCEPTOS BÁSICOS DE TRIGONOMETRÍA



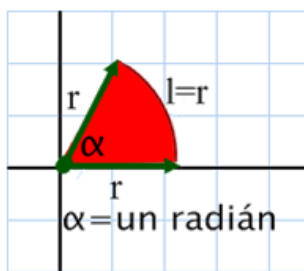
### DEFINICIÓN DE TRIGONOMETRÍA

- La trigonometría (del griego, la medición de los triángulos) es una rama de las matemáticas que estudia los ángulos y los lados de un triángulo cualquiera y las relaciones entre ellos.

Está compuesta por: Prefijo Tri- cuyo significado es tres Lexema –gono- cuyo significado es ángulo y Sufijo –metría cuyo significado es medida.

### DEFINICIÓN DE ÁNGULO.

- Es la porción de plano limitada por dos semirrectas que se unen en un punto.
- Los ángulos se pueden representar centrados en los ejes de coordenadas.
- El sentido positivo es contrario a las agujas del reloj.



### MEDIDA DE UN ÁNGULO.

- La unidad de medida de los ángulos se llama grado, y resulta de dividir un ángulo recto en 90 partes iguales, por lo tanto, un ángulo recto mide  $90^\circ$ .
- El sistema de medición de los ángulos se llama **sexagesimal** y está formado por: un grado = 60 minutos, un minuto = 60 segundos.

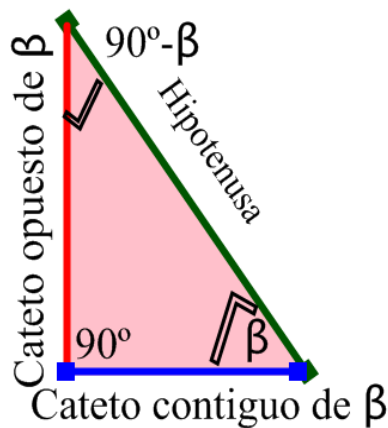
*En la trigonometría, se emplean tres unidades, si bien la más utilizada en la vida cotidiana es el Grado Sexagesimal, en matemáticas es el **Radián** la más utilizada.*

- *RADIAN se define como la unidad natural para medir ángulos, el Grado Centesimal se desarrolló como la unidad más próxima al sistema decimal, pero su uso prácticamente es inexistente.*
- **Grado Sexagesimal:** ángulo recto  $90^\circ$  (Deg en la calculadora Grado Centesimal: centésima parte de un ángulo recto.  $100^\circ$ ).

**RADIAN.** *Es el ángulo plano que, teniendo su vértice en el centro de un círculo, de manera que el arco situado sobre la circunferencia de ese círculo, tiene la longitud igual al radio. Su símbolo es rad.*

### RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Son las distintas proporciones que podemos hacer con los lados de un triángulo rectángulo:



$$\frac{c}{a} = \operatorname{sen} C = \cos B \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\frac{a}{c} = \operatorname{cosec} C = \sec B \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}$$

$$\frac{b}{a} = \cos C = \operatorname{sen} B \Rightarrow \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}}$$

$$\frac{a}{b} = \sec C = \operatorname{cosec} B \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\frac{c}{b} = \operatorname{tg} C = \operatorname{cotg} B \Rightarrow \sec \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}}$$

$$\frac{b}{c} = \operatorname{cotg} C = \operatorname{tg} B \Rightarrow \operatorname{cosec} \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$$

## CONSECUENCIA QUE SE DEDUCE DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

- Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios, es decir, suman 90 grados.
- El coseno de un ángulo es igual al seno de su complementario.  $\text{sen}\alpha = \text{cos}(90-\alpha)$
- La tangente de un ángulo es igual a la cotangente de su complementario.  $\text{tag}\alpha = \text{cotag}(90-\alpha)$

## FÓRMULA FUNDAMENTAL DE LA TRIGONOMETRÍA

$$\text{sen}^2\alpha + \text{cos}^2\alpha = 1$$

## CONSECUENCIAS DE LA FÓRMULA FUNDAMENTAL

Despejo:

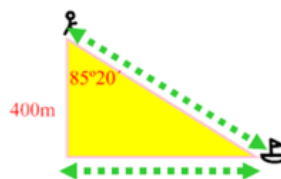
$$\begin{cases} \text{sen}\alpha = \pm\sqrt{1 - \text{cos}^2\alpha} \\ \text{cos}\alpha = \pm\sqrt{1 - \text{sen}^2\alpha} \end{cases}$$

Divido entre  $\text{sen}^2\alpha$ :  $\text{cosec}^2\alpha = 1 + \text{cot}^2\alpha \Rightarrow \text{cosec}\alpha = \pm\sqrt{1 + \text{cot}^2\alpha}$

Divido entre  $\text{cos}^2\alpha$ :  $\text{sec}^2\alpha = 1 + \text{tg}^2\alpha \Rightarrow \text{sec}\alpha = \pm\sqrt{1 + \text{tg}^2\alpha}$

## EJERCICIOS

1. Viky el vikingo esta subido a una roca de 400m de altura y ve un barco enemigo con un ángulo de  $85^\circ 20'$  y le pregunta a su papa: ¿a cuántos metros está el barco de la costa? ¿Y de Viky?
- EL ÁNGULO SE COLOCA EN DONDE ESTÁ VIKY.
  - CATETO OPUESTO ES LA DISTANCIA DEL BARCO A LA ORILLA
  - EL CATEETO CONTIGUO ES LA ALTURA DE LA ROCA EN LA QUE ESTÁ SUBIDO
  - LA RAZÓN QUE UTILIZAMOS ES LA TANGENTE.



- $\text{tag } 85^\circ 20' = x/400 \Rightarrow x = 4900,20\text{m.}$

- Para calcular la distancia de Viky al barco usamos el coseno, porque la distancia es la hipotenusa y el 400 es el cateto contiguo.
- $\cos 85^{\circ} 20' = 400/y \Rightarrow y = 4916,5m$

**El padre de Viky le dice que la catapulta solo alcanza 2000m. ¿A cuántos grados tiene que ver el barco para alcanzarle?**

**Ahora sabemos el cateto contiguo=400m y la hipotenusa que es 2000m, lo que necesitamos es calcular el ángulo. La razón es el coseno.**

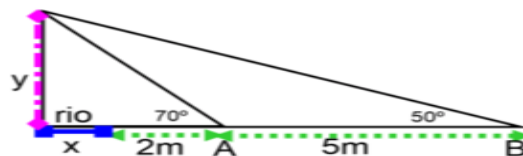
Para calcular el ángulo tenemos que poner en la calculadora el dato  $400/2000=0,2$ . Marcar la tecla shift y la de cos, obtenemos el ángulo en grados, después damos a la tecla ° ' " y nos da la solución  $78^{\circ} 27' 47''$ .

$$\cos \alpha = 400/2000 \Rightarrow \alpha = \arccos 0,2 = 78^{\circ} 27' 47''$$

**En todos los ejercicios que calculamos con las razones trigonométricas debemos tener en cuenta los siguientes puntos:**

- El triángulo debe ser rectángulo.
- Si lo que conocemos es un ángulo y un lado, dependiendo del lado conocido y del que necesitamos calcular, utilizamos una razón u otra.
- Debemos usar siempre, seno, coseno o tangente, porque son las que calcula la calculadora.
- Si conocemos dos lados y necesitamos calcular el ángulo, lo mismo, ponemos la razón correspondiente y con la calculadora mediante la tecla shift, calculamos el ángulo. Esta tecla hace el efecto de "arc".
- Si  $\text{sen} \alpha = 0,5 \Rightarrow \alpha = \arcsen 0,5 = 30^{\circ}$

**2. Calcular la altura de una casa que se ve desde la otra orilla del río que se ve desde un punto A con  $70^{\circ}$  y desde un punto B separado 5m de A con  $50^{\circ}$ . El punto A dista del río 2m.**



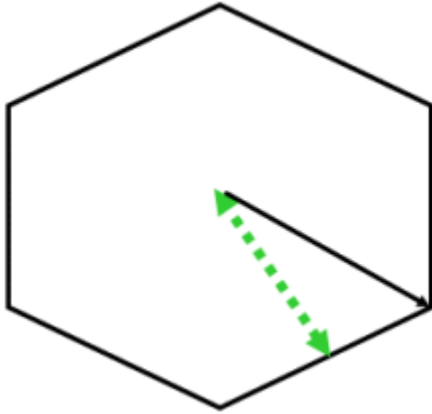
**Hallar también la anchura del río.**

$$\text{tg} 70^{\circ} = \frac{x}{2+y} \Rightarrow x = \text{tg} 70 \cdot (2+y) = 5,48 + 2,74y$$

$$\text{tg} 50^{\circ} = \frac{x}{7+y} \Rightarrow x = \text{tg} 50 \cdot (7+y) = 8,33 + 1,19y \Rightarrow 5,48 + 2,74y = 8,33 + 1,19y$$

$$\Rightarrow 1,5y = 2,8 \Rightarrow y = \frac{2,8}{1,5} = 1,86m \Rightarrow x = 5,48 + 2,74 \cdot 1,86 = 10,57m$$

3. Un hexágono tiene 5m de lado. Calcular el área de la circunferencia inscrita. La circunferencia inscrita a cualquier polígono regular tiene de radio la apotema del polígono. El radio de la circunferencia circunscrita es el radio del polígono. La apotema con el lado forma un ángulo de 90°.



- El ángulo comprendido entre la apotema y el radio, se calcula dividiendo 360° entre el doble del número de lados.
- La apotema es el cateto contiguo.
- El radio es la hipotenusa.
- La mitad del lado es el cateto opuesto.

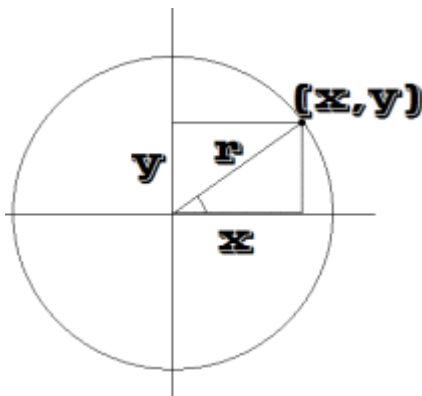
$$\alpha = 360/12 = 30^\circ$$

$$\text{Apotema} = 2,5 / (\text{tag}30) = 4,33$$

$$\text{Área de la circunferencia inscrita} = \pi \cdot a_p^2 = 58,9\text{m}^2.$$

### EJERCICIOS DE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

#### COORDENADAS TRIGONOMÉTRICAS DE UN PUNTO



$(x, y)$  coordenadas cartesianas

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \text{hipotenusa}$$

$$\text{tg} \alpha = \frac{y}{x}$$

$$\alpha = \text{arctg} \frac{y}{x}$$

$$x = r \cdot \cos \alpha$$

$$y = r \cdot \text{sen} \alpha$$

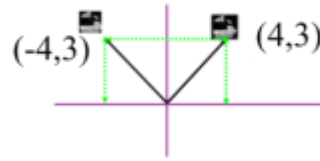
$$(x, y) = (r \cdot \cos \alpha, r \cdot \text{sen} \alpha)$$

Un barco está situado en el punto  $(-4,3)$  calcular sus coordenadas trigonométricas:

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\alpha = \left( \operatorname{arctg} \frac{3}{-4} \right) + 180 = 143^\circ 7' 48''$$

$$(-4,3) = (5 \cdot \cos 143^\circ 7' 48'', 5 \cdot \operatorname{sen} 143^\circ 7' 48'')$$



Mismo barco con coordenadas  $(-3,-4)$

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{-4}{-3} + 180 = 233^\circ 7' 48''$$

$$(-3,-4) = (5 \cdot \cos 233^\circ 7' 48'', 5 \cdot \operatorname{sen} 233^\circ 7' 48'')$$

