

GLOBAL ANÁLISIS

Junio 09

1) Calcula los siguientes límites: (1,5 puntos)

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 6x} - \sqrt{x^2 + 4x} \right) \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{2x^3 - x^2 - 4x + 3} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{\frac{x}{2}}$$

2). Halla las derivadas de las funciones siguientes: (1 punto)

$$\text{a) } y = \ln \sqrt{\frac{e^x + 1}{e^x - 1}} \quad \text{b) } y = \arcsen(x^2 - 1)$$

3) Halla la ecuación de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por el punto $A(0, 0)$ y es tangente a la recta $y = x - 1$ en el punto $B(-1, -2)$. (1 punto)

4) Estudia la continuidad y la derivabilidad de la siguiente función y represéntala gráficamente:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si } x < 2 \\ 3x-5 & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ 2 & \text{si } x \geq 4 \end{cases} \quad (1,5 \text{ puntos})$$

5) Dada la función $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$, se pide: (2 puntos)

- (a) Dominio y asíntotas.
- (b) Intervalos de crecimiento y cálculo de máximos y mínimos.
- (c) Representación gráfica.

6). Entre todos los triángulos rectángulos de hipotenusa 8 cm encuentra el de área máxima. (1,5 puntos)

7) Calcula las siguientes integrales: (1,5 puntos)

$$\int \frac{2}{\sqrt{16-x^2}} dx ; \quad \int \frac{x+6}{1+x^2} dx ; \quad \int 2 \cdot \cos(4x) dx$$

SOLUCIONES

$$1) a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 6x} - \sqrt{x^2 + 4x}) = (\infty - \infty) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 6x} - \sqrt{x^2 + 4x})(\sqrt{x^2 + 6x} + \sqrt{x^2 + 4x})}{(\sqrt{x^2 + 6x} + \sqrt{x^2 + 4x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 6x - x^2 - 4x}{(\sqrt{x^2 + 6x} + \sqrt{x^2 + 4x})} = 1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{2x^3 - x^2 - 4x + 3} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-1)(2x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)}{(2x+3)} = \frac{3}{5}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & & 1 & 2 & \\ \hline & 1 & 2 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -1 & -4 & 3 \\ 1 & & 2 & 1 & -3 \\ \hline & 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & & 2 & 3 & \\ \hline & 2 & 3 & 0 & \end{array}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}} = (1^\infty) = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{x-1} - 1\right) \cdot \frac{x}{2}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{x-1}\right) \cdot \frac{x}{2}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{2x-2}} = e^2$$

$$2) a) y = \ln \sqrt{\frac{e^x + 1}{e^x - 1}} \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{\frac{e^x + 1}{e^x - 1}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{e^x + 1}{e^x - 1}}} \cdot \frac{e^x(e^x - 1) - (e^x + 1)e^x}{(e^x - 1)^2}$$

$$y' = \frac{1}{2\frac{e^x + 1}{e^x - 1}} \cdot \frac{e^{2x} - e^x - e^{2x} - e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{-2e^x}{2(e^x + 1)(e^x - 1)} = \frac{-e^x}{e^{2x} - 1}$$

$$b) y = \arcsen(x^2 - 1) \rightarrow y' = \frac{2x}{\sqrt{1 - (x^2 - 1)^2}} = \frac{2x}{\sqrt{-x^4 + 2x^2}} = \frac{2}{\sqrt{-x^2 + 2}}$$

3) Halla la ecuación de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por el punto $A(0, 0)$ y es tangente a la recta $y = x - 1$ en el punto $B(-1, -2)$. $y' = 2ax + b$

$$f(0) = 0 \Rightarrow 0 + 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$\text{tangente } y = x - 1 \Rightarrow f'(-1) = m = 1 \Rightarrow 2a(-1) + b = 1$$

$$\text{pasa por } B(-1, -2) \Rightarrow f(-1) = -2 \Rightarrow a(-1)^2 + b(-1) = -2$$

$$\left. \begin{array}{l} -2a + b = 1 \\ a - b = -2 \end{array} \right\} \rightarrow -a = -1 \rightarrow a = 1 \Rightarrow 1 - b = -2 \rightarrow -b = -3 \rightarrow b = 3$$

$$\text{parábola } y = x^2 + 3x$$

4)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si } x < 2 \rightarrow \text{hipérbola, continua y derivable en } (-\infty, 2) - \{1\} \\ 3x - 5 & \text{si } 2 \leq x < 4 \rightarrow \text{polinómica, continua y derivable en } (2, 4) \\ 2 & \text{si } x \geq 4 \rightarrow \text{constante, continua y derivable en } (4, +\infty) \end{cases}$$

habrá que estudiar, por tanto, la continuidad y derivabilidad en los puntos 1, 2 y 4

Continuidad en $x = 1$

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = \text{no existe} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{array} \right\} \text{discontinuidad de salto infinito en } x = 1 \rightarrow \text{no derivable}$$

Continuidad en $x = 2$

$$\left. \begin{array}{l} f(2) = 3 \cdot 2 - 5 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (3x - 5) = 1 \end{array} \right\} \text{continua en } x = 2; \quad f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(x-1)^2} & \text{si } x < 2 \\ 3 & \text{si } 2 < x < 4 \\ 2 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

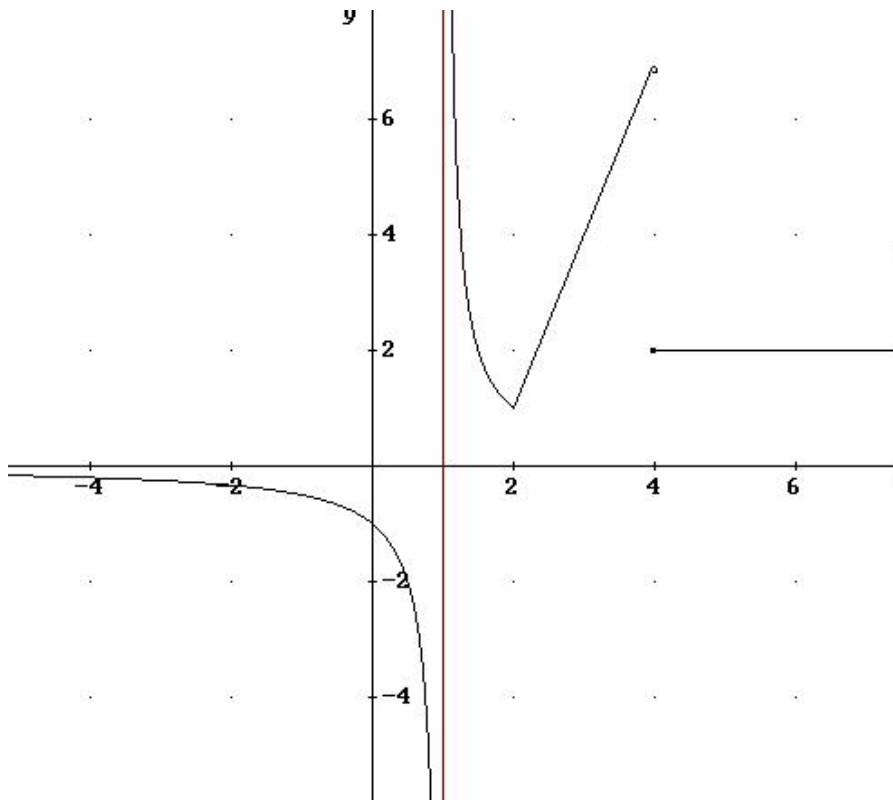
Derivabilidad en $x = 2$

$$\left. \begin{array}{l} f'(2^-) = -\frac{1}{(2-1)^2} = -1 \\ f'(2^+) = 3 \end{array} \right\} \text{No es derivable en } x = 2 \text{ (derivadas laterales distintas)}$$

Continuidad en $x = 4$

$$\left. \begin{array}{l} f(4) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (3x - 5) = 7 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} 2 = 2 \end{array} \right\} \text{discontinuidad de salto finito en } x = 4; \text{ no derivable}$$

Continua en $\mathbb{R} - \{1, 4\}$ y Derivable en $\mathbb{R} - \{1, 2, 4\}$



5) $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$

a) Dominio y asíntotas: Función racional, $\text{Dom} = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ Continua en su dominio.

Asíntotas: Verticales:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} = \frac{4}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} = \frac{1}{0^-} = -\infty \end{aligned} \right\} x = -2;$$

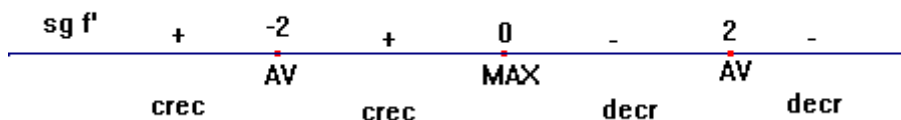
$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} = \frac{4}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{aligned} \right\} x = 2$$

Horizontal:

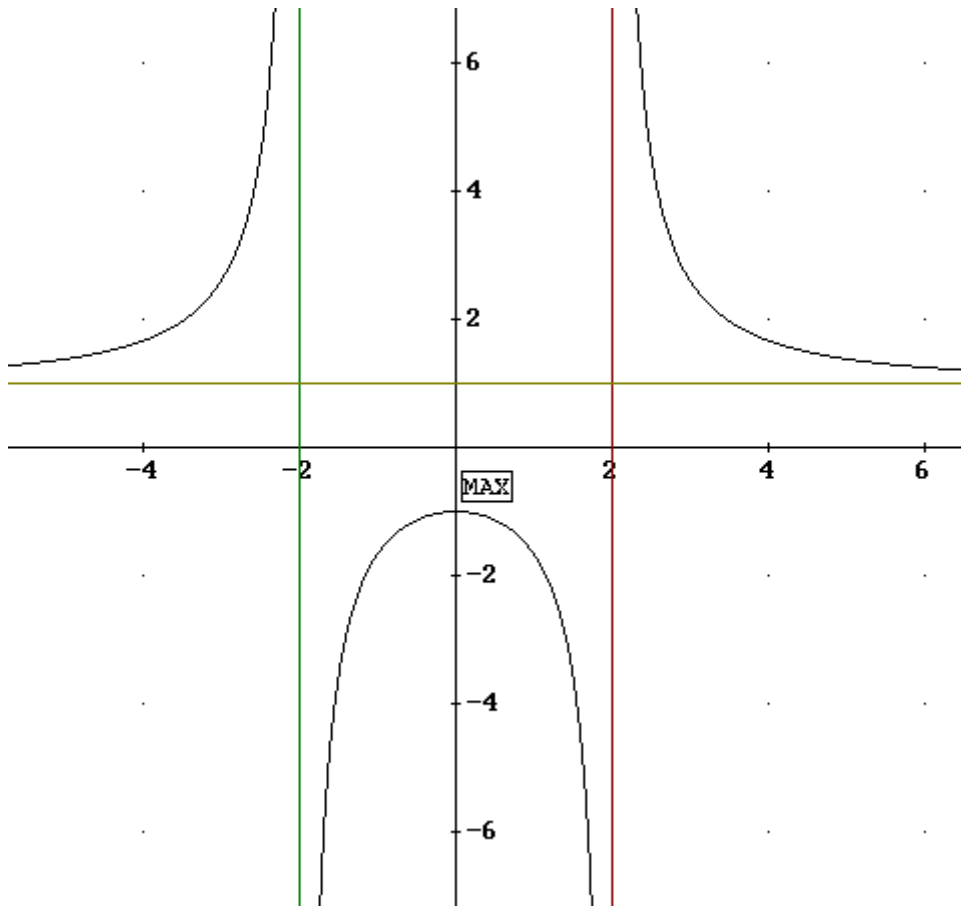
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} = 1 \rightarrow y = 1$$

b) Intervalos de crecimiento y cálculo de máximos y mínimos.

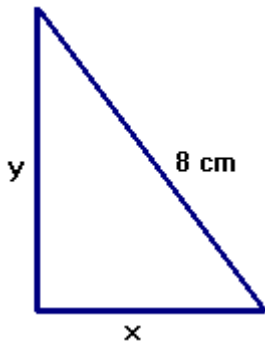
$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4) - (x^2 + 4)2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-16x}{(x^2 - 4)^2} = 0 \rightarrow -16x = 0 \rightarrow x = 0$$



c) Representación gráfica



6). Entre todos los triángulos rectángulos de hipotenusa 8 cm encuentra el de área máxima.



$$A = \frac{x \cdot y}{2} \quad \text{pero sabemos que } 8^2 = x^2 + y^2$$

$$\text{de donde } y = \sqrt{64 - x^2} \rightarrow f(x) = \frac{x \cdot \sqrt{64 - x^2}}{2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{64 - x^2} + \frac{x \cdot (-2x)}{2\sqrt{64 - x^2}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{64 - x^2 - x^2}{\sqrt{64 - x^2}} \right)$$

$$\frac{64 - 2x^2}{2\sqrt{64 - x^2}} = 0 \Rightarrow 64 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{32}$$

La negativa no vale, por ser una longitud, y vemos que para valores de x menores de $\sqrt{32}$ la función derivada es positiva, o sea f es creciente y para valores de x mayores que $\sqrt{32}$ la función derivada es negativa, o sea f es decreciente, con lo que para $x = \sqrt{32}$ el área del triángulo es máxima.

Solución: el área es máxima para $x = \sqrt{32} = y$, es decir cuando el triángulo es rectángulo isósceles de catetos $4\sqrt{2}$ cm

$$7) \int \frac{2}{\sqrt{16-x^2}} dx = 2 \int \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{16}{16} - \frac{x^2}{16}}} dx = 2 \int \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{4}\right)^2}} dx = 2 \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{4}\right) + C$$

$$\int \frac{x+6}{1+x^2} dx = \int \frac{x}{1+x^2} dx + \int \frac{6}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx + 6 \int \frac{1}{1+x^2} dx = \\ = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + 6 \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int 2 \cdot \cos(4x) dx = 2 \int \cos(4x) dx = \frac{2}{4} \int 4 \cos(4x) dx = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(4x) + C$$